

Tentamenopgave¹

I

Notatie $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Formuleer de stelling van Weierstrass over het bestaan van minima en maxima voor functies van meerdere variabelen.

Beschouw de functie f , gedefinieerd op \mathbb{R}^3 door

$$(1) \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + z$$

2. Toon aan dat voor alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(2) \quad |xy + z| \leq \frac{1}{2}\|X\|^2 + \|X\|$$

Aanwijzing: Gebruik de ongelijkheid $2xy \leq x^2 + y^2$.

3. Toon aan dat $\lim_{\|X\| \rightarrow \infty} f(X) = +\infty$.

Aanwijzing: Toon aan dat, met de notatie van vraag 1, $f(X) \geq \frac{1}{2}\|X\|^2 - \|X\|$.

4. Toon aan dat de functie f op \mathbb{R}^3 een absoluut minimum heeft, en bepaal de waarde hiervan.

5. Beschouw nu de vergelijking

$$(3) \quad f(x, y, z) = 0$$

i. Aan welke voorwaarde moet f voldoen om (lokaal) z te kunnen uitdrukken als functie φ van (x, y) zodat $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$? Formuleer de relevante stelling.

ii. Onder de voorwaarde genoemd bij vraag i., bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$ en $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$ in termen van de functies f en φ .

II

Notatie: $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

1. Beschouw de transformatie $\Phi : (x, y) \mapsto (u, v)$ gedefinieerd op \mathbb{R}_+^2 door $u = x$, $v = x/y$. Toon aan dat Φ een diffeomorfisme is van \mathbb{R}_+^2 op \mathbb{R}_+^2 en bereken de inverse transformatie Φ^{-1} .

2. Zij $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ een functie van de vorm $f(x, y) = F(x/y)$ met $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Toon aan dat

$$(4) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

3. Toon omgekeerd aan dat een continu differentieerbare functie f op \mathbb{R}_+^2 die voldoet aan (4) een functie is van de vorm $F(x/y)$.

Aanwijzing: Stel $F(u, v) = f(x, y)$ (d.w.z. $F = f \circ \Phi^{-1}$) en toon aan dat $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$.

III

1. Formuleer de stelling over transformatie van de variabelen in een meervoudige integraal.

2. Gebruik deze stelling voor de berekening van de integraal

$$(5) \quad \iint_D \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}$$

waar $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

¹De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk.